ILP500 – Laboratório de Arquitetura e Organização de Computadores
Prof. Sérgio Luiz Banin

Registro da Aula

Números Reais em Binário – Números em ponto flutuante

17,4 = 17 inteiros + 4 partes de um inteiro que foi divido em 10 partes

0	0	1	7	,	4	0	0	0
Milhar	Centena	Dezena	Unidade		Décimo	Centésimo	Milésimo	Décimo milésimo
10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

312,873 = 312 inteiros + 873 partes de um inteiro que foi divido em 1000 partes

0	3	1	2	,	8	7	3	0
Milhar	Centena	Dezena	Unidade		Décimo	Centésimo	Milésimo	Décimo milésimo
10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

Como fica isso em binário? O processo é o mesmo trocando-se a base 10 pela base 2

1011,0110 → vamos aplicar a este binário a mesma ideia que aplicamos aos decimais acima

$(1011{,}0110)_2 = (11{,}375)_{10}$

1	0	1	1	,	0	1	1	0
2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
8	4	2	1	,	0,5	0,25	0,125	0,0625

8+2+1 , 0,25 + 0,125 = 11,375

$(0110{,}1010)_2 = (6{,}625)_{10}$

0	1	1	0	,	1	0	1	0
2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
8	4	2	1	,	0,5	0,25	0,125	0,0625

4 + 2 , 0,5 + 0,125 = 6,625

$(12{,}75)_{10} = (1100{,}1100)_2$

1	1	0	0	,	1	1	0	0
2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
8	4	2	1	,	0,5	0,25	0,125	0,0625

$(9{,}3)_{10} = (1001{,}????????)_2$

1	0	0	1	,	0	1	0	0
2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
8	4	2	1	,	0,5	0,25	0,125	0,0625

A partir de agora a parte de qualquer número não nos interessa mais. Já sabemos converter a parte inteira.

Vamos nos concentrar exclusivamente na parte fracionária dos números reais. Ou seja, vamos trabalhar apenas com valores no intervalo aberto]0, 1[

Conversão de números reais na faixa]0, 1[para binário. Regra prática → multiplicações sucessivas.

Exemplo:
Vamos converter para binário o valor 0,375

```
0,375 x 2 = 0,75
0,75  x 2 = 1,5
0,5   x 2 = 1,0
0,0                         quando se chega em 0 o processo acaba.
```

0,011

$(0{,}375)_{10} = (0{,}011)_2$

Exercício
Determine o binário para os valores abaixo, usando a regra prática de multiplicações sucessivas

$(0{,}625)_{10} = (0{,}101)_2$

```
0,625 x 2 = 1,25
0,25  x 2 = 0,5
0,5   x 2 = 1,0
0,0
```

0,101

$(0{,}75)_{10} = (0{,}11)_2$

```
0,75  x 2 = 1,5
0,5   x 2 = 1,0
0,0
```

0,11

$(0{,}3)_{10} = (0{,}0\underline{1001...})_2$

```
0,3  x 2 = 0,6
0,6  x 2 = 1,2
0,2  x 2 = 0,4
0,4  x 2 = 0,8
0,8  x 2 = 1,6
0,6   este coeficiente já apareceu antes, o que implica em dízima periódica
```

0,01001100110011001... → 0,0<u>1001 ...</u> (dízima periódica)

A situação acima – o surgimento de uma dízima periódica – ocorre na maioria dos casos de conversão de números reais para binário. São poucos os valores reais que tem representação exata.
Quem são esses valores, cuja representação é exata?
A resposta a essa pergunta depende da quantidade de bits (à direita do ponto decimal) com que estamos trabalhando.

A tabela a seguir apresenta, para 4 bits depois do ponto decimal, os valores exatos possíveis de serem representados em binário (com 4 bits). Qualquer outro valor será uma aproximação.

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	Valores exatos possíveis
0	0	0	1	0,0625
0	0	1	0	0,1250
0	0	1	1	0,1875
0	1	0	0	0,2500
0	1	0	1	0,3125
0	1	1	0	0,3750
0	1	1	1	0,4375
1	0	0	0	0,5000
1	0	0	1	0,5625
1	0	1	0	0,6250
1	0	1	1	0,6875
1	1	0	0	0,7500
1	1	0	1	0,8125
1	1	1	0	0,8750
1	1	1	1	0,9375

A partir de agora vamos trabalhar com um foco computacional, ou seja, precisamos definir quantos bits utilizaremos na nossa precisão numérica.

Vamos trabalhar **com 5 bits**.

Nos exercícios a seguir o objetivo é descobrir a melhor combinação de bits que representa o valor decimal desejado.

$(0{,}3)_{10}$ ~= (**0,01010** $)_2$ ← Neste caso a aproximação a **maior** é a mais adequada

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
0	1	0	0	1	← esta é uma aproximação a menor
0	1	0	1	0	← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor $(0{,}3)_{10}$ ~= $(\,0{,}01001\,)_2 = (\,0{,}28125\,)_{10}$ => Err = 6,25%

Aproximação a maior $(0{,}3)_{10}$ ~= $(\,0{,}01010\,)_2 = (\,0{,}3125\,)_{10}$ => Err = 4,17%

```
0,3 x 2 = 0,6
0,6 x 2 = 1,2
0,2 x 2 = 0,4
0,4 x 2 = 0,8
0,8 x 2 = 1,6
```

```
0,01001
```

Cálculo do erro

$$Err = \frac{|\,Nd - No\,|}{Nd}$$

Na aproximação a menor teremos: |0,3 – 0,28125| / 0,3 * 100 = 6,25%
Na aproximação a maior teremos: |0,3 – 0,3125| / 0,3 * 100 = 4,17%

$(0,63)_{10}$ ~= (**0,10100** $)_2$ ← Neste caso a aproximação a **menor** é a mais adequada

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
1	0	1	0	0	← esta é uma aproximação a menor
1	0	1	0	1	← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor $(0,63)_{10}$ ~= (0,10100 $)_2$ = (0,625 $)_{10}$ => Err = 0,79%

Aproximação a maior $(0,63)_{10}$ ~= (0,10101 $)_2$ = (0,65625 $)_{10}$ => Err = 4,17%

```
0,63 x 2 = 1,26
0,26 x 2 = 0,52
0,52 x 2 = 1,04
0,04 x 2 = 0,08
0,08 x 2 = 0,16
```

Aprox. a menor	1	0	1	0	0
Soma 1	0	0	0	0	1
Aprox. a maior	1	0	1	0	1

Na aproximação a menor teremos: |0,63 – 0,625| / 0,63 * 100 = 0,79%
Na aproximação a maior teremos: |0,63 – 0,65625| / 0,63 * 100 = 4,17%

Resolução de exercícios

$(0{,}45)_{10}$ ~= (**0,01110** $)_2$ ← Neste caso a aproximação a **menor** é a mais adequada

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
0	1	1	1	0	← esta é uma aproximação a menor
0	1	1	1	1	← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor $(0{,}45)_{10}$ ~= (0,01110 $)_2$ = (0,4375 $)_{10}$ => Err = 2,78%

Aproximação a maior $(0{,}45)_{10}$ ~= (0,01111 $)_2$ = (0,46875 $)_{10}$ => Err = 4,17%

Solução feita com o auxílio de uma planilha Excel

0,45	x2	0,9	0
0,9	x2	1,8	1
0,8	x2	1,6	1
0,6	x2	1,2	1
0,2	x2	0,4	0

$(0{,}77)_{10}$ ~= (**0,11001** $)_2$ ← Neste caso a aproximação a **maior** é a mais adequada

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
1	1	0	0	0	← esta é uma aproximação a menor
1	1	0	0	1	← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor $(0{,}77)_{10}$ ~= (0,11000 $)_2$ = (0,75 $)_{10}$ => Err = 2,60%

Aproximação a maior $(0{,}77)_{10}$ ~= (0,11001 $)_2$ = (0,78125 $)_{10}$ => Err = 1,46%

$(0{,}89)_{10}$ ~= (**0,11100** $)_2$ ← Neste caso a aproximação a **menor** é a mais adequada

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
1	1	1	0	0	← esta é uma aproximação a menor
1	1	1	0	1	← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor $(0{,}89)_{10}$ ~= (0,11100 $)_2$ = (0,875 $)_{10}$ => Err = 1,69%

Aproximação a maior $(0{,}89)_{10}$ ~= (0,11101 $)_2$ = (0,90625 $)_{10}$ => Err = 1,83%

Exercícios para a semana. Faça a conversão destes números reais usando 5 bits de precisão

$(0{,}23)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

$(0{,}87)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

$(0{,}155)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

$(0{,}306)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

$(0{,}296)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

$(0{,}18)_{10}$ ~= (0,??? $)_2$

Gabarito para resolução dos exercícios acima

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____$)_{10}$ ~= (0, $)_2$ = (0, $)_{10}$ => Err = %

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	

0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	
					← esta é uma aproximação a menor
					← esta é uma aproximação a maior

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %

Aproximação a menor (0,____)$_{10}$ ~= (0,)$_2$ = (0,)$_{10}$ => Err = %