ILP500 – Laboratório de Arquitetura e Organização de Computadores
Prof. Sérgio Luiz Banin

Registro da Aula

Álgebra Booleana – Continuação

Resumo de Relações Relevantes (vistas na aula anterior)

R = A . 0 = 0

R = A + 0 = A

R = A . 1 = A

R = A + 1 = 1

R = A . A = A

R = A + A = A

R = A . A' = 0

R = A + A' = 1

A ⊕ B = A' . B + A . B'

A ⊗ B = A' . B' + A . B

(A' . B + A . B')' = A' . B' + A . B => (A ⊕ B)' = A ⊗ B

(A' . B' + A . B)' = A' . B + A . B' => (A ⊗ B)' = A ⊕ B

A + A' . B = A + B

(A . B)' = A' + B'

(A + B)' = A' . B'

Prioridades na avaliação de uma expressão lógica complexa (aquela que envolve mais de uma operação)

Negação: '

XAnd: ⊗

And: .

XOr: ⊕

Or: +

Resolução dos exercícios da semana passada

Exercícios: dada a equação resolva a tabela verdade

R = A + B' . C'

A	B	C	R	B'	C'	B' . C'
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

R = (A + B') . C'

A	B	C	R	C'	B'	A + B'
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	

R = (A' + C) . B + B' . C' = A' . B + C . B + B' . C' = A' . B + B . C + B' . C' = A' . B + B $\otimes$ C

A	B	C	R	A'	A' . B	B $\otimes$ C
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

R = A . B + A $\oplus$ C

A	B	C	R	A . B	A $\oplus$ C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Exercícios: dada a tabela verdade determine a equação usando o método "Soma dos Produtos". Faça todas as simplificações que conseguir.

1. R = ???

A	B	C	R	
0	0	0	0	
0	0	1	1	A' . B' . C
0	1	0	0	
0	1	1	1	A' . B . C
1	0	0	0	
1	0	1	1	A . B' . C
1	1	0	1	A . B . C'
1	1	1	1	A . B . C

1ª Abordagem – simplificando por partes

R = A' . B' . C + A' . B . C + A . B' . C + A . B . C' + A . B . C

R = A' . C . (B' + B) + A . B' . C + A . B . (C' + C)

R = A' . C . 1 + A . B' . C + A . B . 1

R = A' . C + A . B' . C + A . B

Vamos agora trabalhar na expressão: A . B' . C + A . B

A . B' . C + A . B = A . (B' . C + B) = A . (C + B)

e retornamos com esse resultado parcial na expressão de R

R = A' . C + A . (C + B), aplicando a distributiva teremos:

R = A' . C + A . C + A . B

R = (A' + A) . C + A . B

R = 1 . C + A . B

R = C + A . B = A . B + C

Conferindo...

A	B	C	R	A . B	R original
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

2ª abordagem para este mesmo exercício – reconhecendo que C ocorre em 4 de 8 possibilidades

R = A' . B' . C + A' . B . C + A . B' . C + A . B . C' + A . B . C

R = A' . B' . C + A' . B . C + A . B' . C + A . B . C + A . B . C'

R = C . (A' . B' + A' . B + A . B' + A . B) + A . B . C'

R = C . (1) + A . B . C'

R = C + A . B . C' → R = C + A . B = A . B + C

2. R = ???

A	B	C	R	
0	0	0	1	A' . B' . C'
0	0	1	1	A' . B' . C
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	A . B' . C'
1	0	1	1	A . B' . C
1	1	0	0	
1	1	1	1	A . B . C

R = A' . B' . C' + A' . B' . C + A . B' . C' + A . B' . C + A . B . C

R = B' . (A' . C' + A' . C + A . C' + A . C) + A . B . C

R = B' . (1) + A . B . C

R = B' + A . B . C

R = B' + A . C

A + A' . B = A + B usando outros nomes de variáveis podemos escrever:
X + X' . Y = X + Y
se
X = B'
Y = A . C
B' + B . A . C = X + X' . Y = X + Y = B' + A . C

Existe uma segunda técnica que pode ser usada: Produto das Somas

R = ??? → resultado final: R = C' + A . B

A	B	C	R	R = Produto (E) das Somas (OU)
0	0	0	1	
0	0	1	0	A + B + C'
0	1	0	1	
0	1	1	0	A + B' + C'
1	0	0	1	
1	0	1	0	A' + B + C'
1	1	0	1	
1	1	1	1	

R = (A + B + C') . (A + B' + C') . (A' + B + C')

R = (A . A + A . B' + A . C' + B . A + B . B' + B . C' + C' . A + C . B' + C' . C') . (A' + B + C')

Olhando apenas a parcial em cor preta

A . A + A . B' + A . C' + B . A + B . B' + B . C' + C' . A + C . B' + C' . C'

A + A . B' + A . C' + A . B + 0 + B . C' + A . C' + B' . C + C'

A + A . B' + A . C' + A . B + A . C' + B . C' + C' + B' . C

$A \,.\, (\underbrace{1 + B' + C' + B + C'}_{=1}) + C' (\underbrace{B + 1}_{=1}) + B' \,.\, C = A + C' + B' \,.\, C$

R = (A + C' + B' . C) . (A' + B + C') → Ainda resta aplicar a distributiva novamente nesta expressão...

Tarefa: terminar este exercício distribuindo e simplificando essa expressão acima.

Uma aplicação prática no universo dos processadores

Quero somar dois números inteiros de 8 bits cada um.

Sejam A e B os nossos números, vejamos um exemplo: A = 124 e B = 26

bit nº	7	6	5	4	3	2	1	0
Vai/Vem	1	1	1	1	0	0	0	
A	0	1	1	1	1	1	0	0
B	0	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	0	1	0	1	1	0

Circuito Meio Somador – se aplica apenas ao dígito menos significativo (n = 0)

A_0	B_0	$R = A \oplus B$	Va = A . B
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Circuito Somador Integral – se aplica a todos os demais dígitos (n > 0)

A_n	B_n	Ve_n	R	Va
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Equação para R

A_n	B_n	Ve_n	R	Soma dos Produtos
0	0	0	0	
0	0	1	1	A' . B'. Ve
0	1	0	1	A' . B . Ve'
0	1	1	0	
1	0	0	1	A . B' . Ve'
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	A . B . Ve

$R = A' . B'. Ve + A' . B . Ve' + A . B' . Ve' + A . B . Ve$
$R = A' . (B'. Ve + B . Ve') + A . (B' . Ve' + B . Ve)$
$R = A' . (B \oplus Ve) + A . (B \otimes Ve)$

Se $(B \oplus Ve) = X$, então $(B \otimes Ve) = X'$

... podemos reescrever:
$R = A' . (B \oplus Ve) + A . (B \otimes Ve) = A' . X + A . X' = A \oplus X$
portanto:
$R = A \oplus B \oplus Ve$

Equação para Va

A_n	B_n	Ve_n	Va	Soma dos Produtos
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	A' . B . Ve
1	0	0	0	
1	0	1	1	A . B' . Ve
1	1	0	1	A . B . Ve'
1	1	1	1	A . B . Ve

Va = A' . B . Ve + A . B' . Ve + A . B . Ve' + A . B . Ve
Va = A' . B . Ve + A . B' . Ve + A . B . (Ve' + Ve)
Va = A' . B . Ve + A . B' . Ve + A . B . 1
Va = A' . B . Ve + A . B' . Ve + A . B
Va = A' . B . Ve + A . (B' . Ve + B) = A' . B . Ve + A . (Ve + B) = A' . B . Ve + A . Ve + A . B
Va = A' . B . Ve + A . Ve + A . B
Va = A' . B . Ve + A . B + A . Ve
Va = B . (A' . Ve + A) + A . Ve = B . (Ve + A) + A . Ve = B . Ve + B . A + A . Ve
... rearranjando temos a expressão final usada para o Vai:
Va = A . B + A . Ve + B . Ve

Resumindo

Circuito Meio Somador

R = A $\oplus$ B

Va = A . B

Circuito Somador Integral

R = A $\oplus$ B $\oplus$ Ve

Va = A . B + A . Ve + B . Ve

Nota de rodapé

Na expressão Va = A' . B . Ve + A . B' . Ve + A . B . Ve' + A . B . Ve

Tomando as duas primeiras parcelas, é possível fazer essa simplificação:

A' . B . Ve + A . B' . Ve = (A' . B + A . B') . Ve   onde o termo (A' . B + A . B') é substituído pelo XOR

Porém, não é esta a solução implementada nos processadores